ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Διδάσκοντες: Α. ΤΟΛΙΑΣ, Π. ΤΣΑΜΑΤΟΣ
Εξεταστική περίοδος Ιουνίου 2014

Θέμα 1. [1 μον.]
Να κάνετε τον πίνακα αλήθειας για την πρόταση $\Big(q \Rightarrow r\Big) \wedge \Big(\sim (p \ \Rightarrow r)\Big)$. Με χρήση του πίνακα αυτού να απαντήσετε στο εξής ερώτημα: Αν γνωρίζουμε ότι η πρόταση $\Big(q \Rightarrow r\Big) \wedge \Big(\sim (p \ \Rightarrow r)\Big)$ είναι αληθής, ποιες από τις προτάσεις p, q, r είναι αληθείς και ποιες ψευδείς;

Θέμα 2. [2 μον.]
(α) Δίνεται η ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $A_1 = \emptyset$ και $A_{n+1} = \mathcal{P}(A_n) - A_n$.
Να βρείτε τα σύνολα A_2, A_3, A_4, A_5.

(β) Αν A, B είναι δύο μη κενά σύνολα για τα οποία ισχύει $A \times B \subseteq B \times A$, να δείξετε ότι $A = B$.

Θέμα 3. [2 μον.]
(α) Δίνεται το σύνολο $X = \{a, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$. Να ορίσετε μια σχέση διάταξης στο σύνολο X ώστε να έχει μέγιστο στοιχείο το ε και ακριβώς δύο ψευδοελάχιστα (minimal), τα a και β.

(β) Στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, ορίζουμε τις σχέσεις σ και r ως εξής:
$x \, \sigma \, y \iff 2x < 3y.$
$x \, r \, y \iff \exists k \in \mathbb{N} : \ x = k^2 y.$
Για καθεμιά από τις σ, r να εξετάσετε αν είναι ανακλαστική (αυτοπαθής), συμμετρική, αντισυμμετρική και μεταβατική.

Θέμα 4. [2 μον.]
(α) Αν $f : A \to B$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη (1–1) και επί συνάρτηση, να δείξετε ότι η $f^{-1} : B \to A$ είναι συνάρτηση και μάλιστα αμφιμονοσήμαντη (1–1) και επί.
(β) Δίνονται A, B δύο μη κενά σύνολα σύνολα, $\{B_i, \ i \in I\}$ μια διαμέριση του συνόλου B και $f : A \to B$ μια συνάρτηση επί του συνόλου B. Να δείξετε ότι η οικογένεια συνόλων $\{f^{-1}(B_i), \ i \in I\}$ είναι μια διαμέριση του συνόλου A.

Θέμα 5. [2 μον.]
(α) Να δοθεί ο ορισμός του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $a, \beta \in \mathbb{N}$ ισχύει $a + \beta \in \mathbb{N}$.

(β) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Να δείξετε ότι $\sup(-f) = -\inf f$ και ότι $\sup(5f) = 5\sup f$

Θέμα 6. [2 μον.]
(α) Θεωρούμε A ένα απέραντο (άπειρο) σύνολο και $a, \beta \in A$, με $a \neq \beta$. Να δείξετε ότι $A - \{a, \beta\} \simeq A$.
(β) Αν A είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο και B ένα πεπερασμένο μη κενό σύνολο, να δειχθεί ότι το σύνολο $A \times B$ είναι αριθμήσιμο.

Καλή επιτυχία!